

信号与系统

第1章 信号与系统的基本概念

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第1章 信号与系统的基本概念

1.1 信号的描述与分类

1.2 基本信号及其时域特性

1.3 信号的基本运算

1.4 系统的描述与分类

1.5 线性时不变系统的性质

1.1 信号的描述与分类

信号的描述

信号的分类

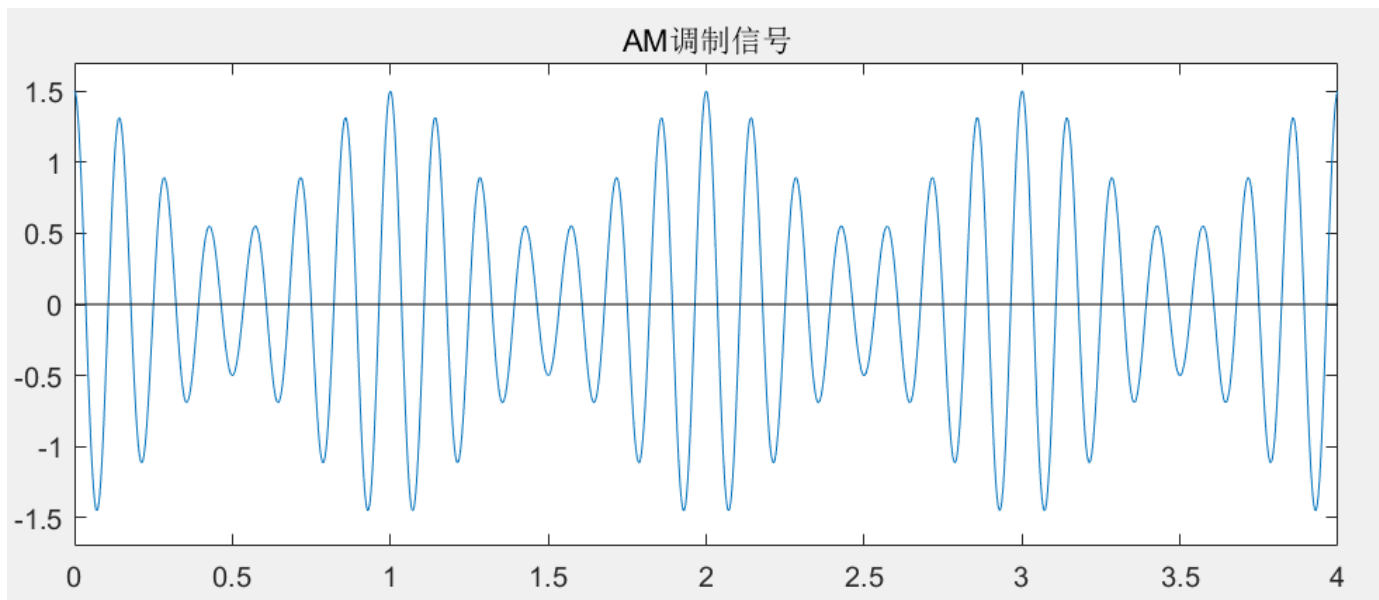
■ 信号的描述

信号可以用函数解析式描述，也可以用波形图描述。

函数解析式

$$s_{\text{AM}}(t) = [A_0 + m(t)] \cos \omega_c t$$

信号波形图



■ 信号的分类

确定信号和随机信号

- 确定信号可以用确定的函数式或者波形表示
- 随机信号不可以用确定的函数式或者波形表示，需要用概率密度、相关函数、谱密度等数学模型进行分析（随机过程）。

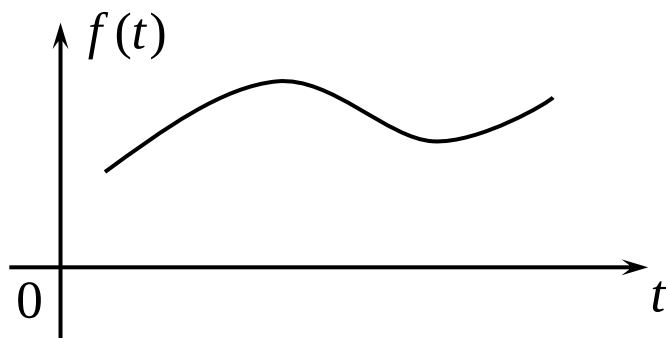
连续时间信号和离散时间信号

名称	时间取值	幅度取值
连续时间信号	连续	可以连续、可以不连续
离散时间信号	离散	可以连续、可以不连续
模拟信号	连续	连续
数字信号	离散	离散

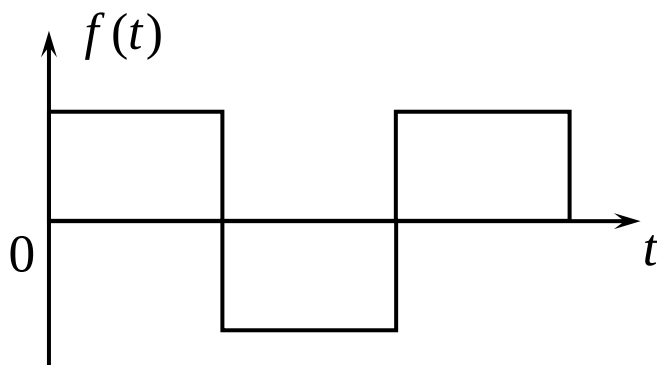
- 时间连续或离散的含义是**定义域的连续或离散**。因此需要和数学中的概念作区分。

■ 信号的分类

连续时间信号

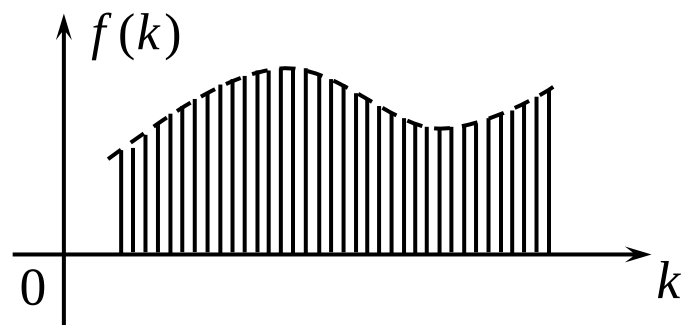


时间连续、幅度连续

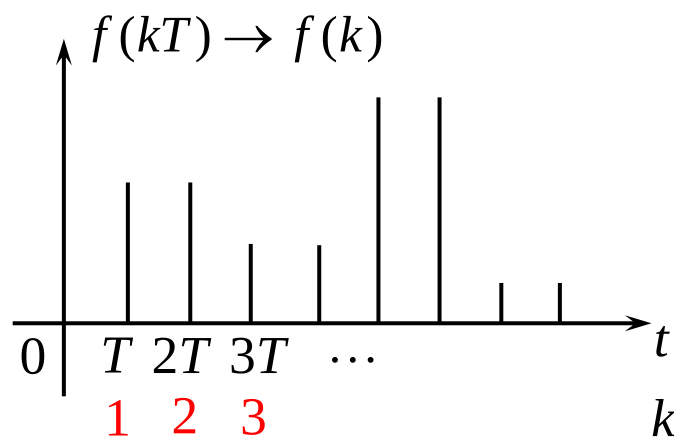


时间连续、幅度离散

离散时间信号



时间离散、幅度连续



时间离散、幅度离散

■ 信号的分类

周期信号和非周期信号

周期信号指的是每隔一定时间 T （或者整数 N ）按相同规律重复变化的信号。

- 连续周期信号： $f(t) = f(t + mT), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- 离散周期信号： $f(k) = f(k + mN), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

非周期信号不具备周期性，令周期信号的周期趋于无穷大，则周期信号变为非周期信号。

例题1 判断下列信号是否是周期信号，如果是，求其周期。

1) $f(t) = \sin \pi t + 2 \cos 2t$

2) $f(t) = \sin 2t + \cos 3t$

两个连续周期信号之和的周期性判定：

- 若两连续信号周期之比为有理数，设 $T_1/T_2 = P/Q$ ，其中 P 、 Q 为互质的整数，则和信号为周期信号，周期为 T_1 和 T_2 的最小公倍数：

$$T = QT_1 = PT_2$$

- 若两连续信号周期之比为无理数，则和信号为非周期信号。即两个连续周期信号的和不一定是周期信号。

■ 信号的分类

能量信号和功率信号

➤ 信号的能量与功率

设信号的能量为 E ，功率为 P ：

$$\begin{array}{ll} \text{连续信号} \left\{ \begin{array}{l} E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \\ P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt \end{array} \right. & \text{离散信号} \left\{ \begin{array}{l} E = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)|^2 \\ P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N |f(k)|^2 \end{array} \right. \end{array}$$

➤ 能量信号与功率信号

能量信号：能量为有界值，即 $0 < E < +\infty$ ，此时功率为 $P = 0$

功率信号：功率为有界值，即 $0 < P < +\infty$ ，此时能量为 $E = \infty$

结论： 周期信号都是功率信号，时域有限信号都是能量信号。

例题2 判断下列信号是能量信号还是功率信号，并求能量或功率。

1) $f(t) = 10\cos(3t - \theta)$

2) $f(t) = 10e^{-5t}, t \geq 0$

3) $f(t) = t, 0 \leq t \leq 2$

4) $f(k) = k, 0 \leq k \leq 4$

5) $f(k) = 2, k \geq 0$

6) $f(k) = (-0.5)^k, k \geq 0$

1.2 基本信号及其时域特性

常见连续信号

奇异信号

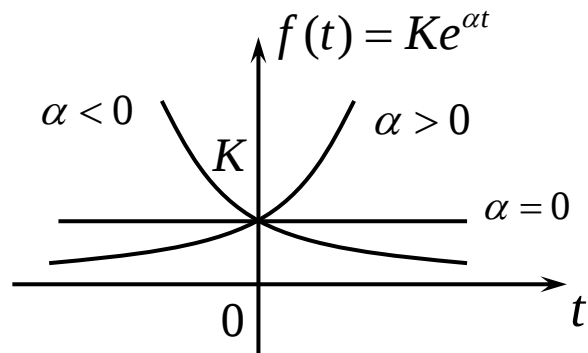
基本离散序列

■ 常见连续信号

指数信号

$$f(t) = Ke^{\alpha t}$$

指数信号对时间求导
积分仍然是指数信号



正弦信号

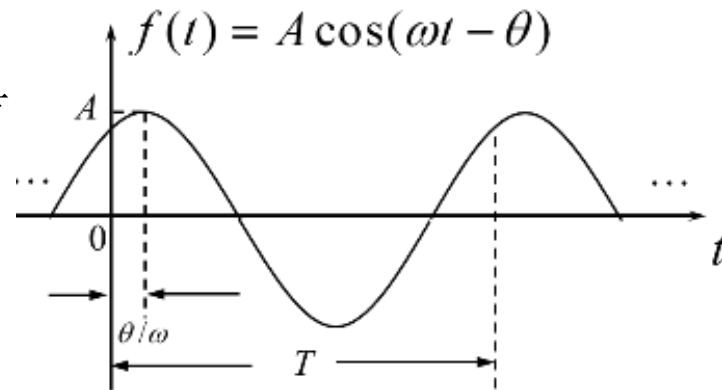
正弦、余弦函数统称为正弦信号

$$f(t) = A\cos(\omega t - \theta)$$

周期 T 、角频率 ω 、频率 f $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

正弦信号对时间求导，积分仍然是正弦信号。

根据欧拉公式
$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \\ e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\ \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \end{cases}$$

■ 常见连续信号

复指数信号

$$f(t) = Ke^{st} = Ke^{(\sigma + j\omega)t}$$
$$= Ke^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

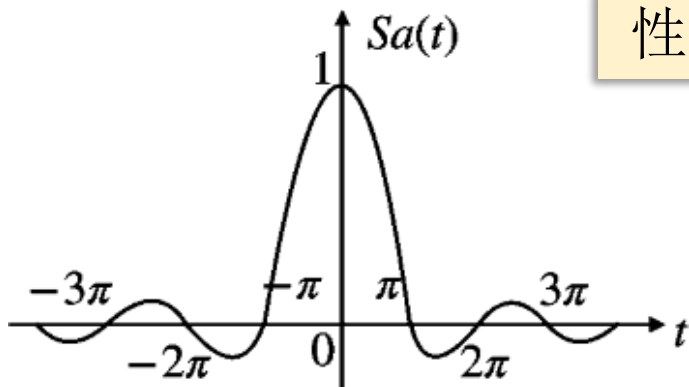
σ 决定增长或衰减

ω 决定振荡的快慢

- $\sigma = 0, \omega \neq 0$: 实部和虚部均为等幅振荡
- $\sigma > 0, \omega \neq 0$: 实部和虚部均为增长振荡
- $\sigma < 0, \omega \neq 0$: 实部和虚部均为衰减振荡
- $\sigma \neq 0, \omega = 0$: 为实指数信号
- $\sigma = 0, \omega \neq 0$: 为虚指数信号
- $\sigma = \omega = 0$: $f(t) = K$ 为直流信号

抽样信号

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} = Sa(t)$$



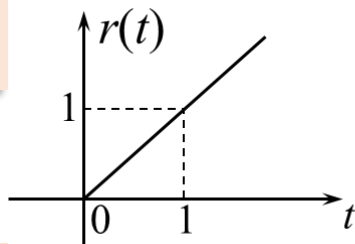
性质

- $Sa(t)$ 为 t 的偶函数
- $\lim_{t \rightarrow 0} Sa(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} Sa(t) = 0$
- 过零点: $t = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$
- $\int_0^{+\infty} Sa(t) dt = \int_{-\infty}^0 Sa(t) dt = \frac{\pi}{2}$

■ 奇异信号

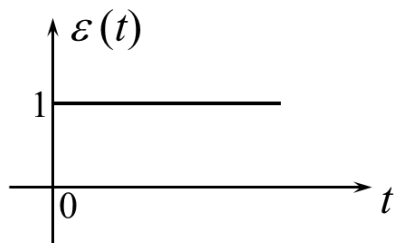
函数本身或其导数、积分有不连续点（即跳变点）的信号。

单位斜变信号 $r(t)$

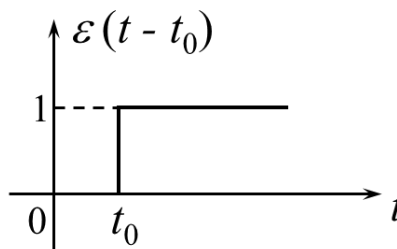


$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$



$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



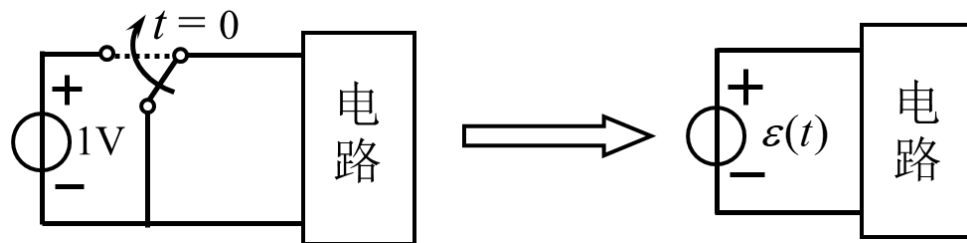
$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

在 $t = 0$ 处函数值无定义，
也有些教材定义 $t = 0$ 处的
函数值为 $1/2$ 。

$$r(t) \text{ 与 } \varepsilon(t) \text{ 的关系: } r(t) = t\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = \frac{dr(t)}{dt}, \quad r(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(x)dx$$

■ 奇异信号

单位阶跃信号的物理意义

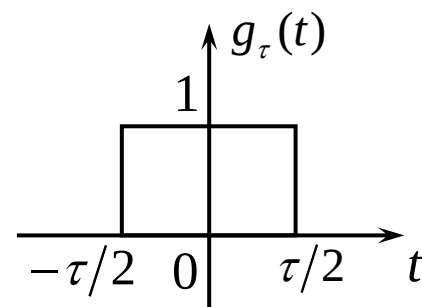


阶跃函数描述了信号的**接入特性**。

- $\varepsilon(t)$ 表示信号 $f(t)=1$ 在 $t=0$ 时刻接入系统
- $f(t)\varepsilon(t)$ 表示信号 $f(t)$ 在 $t=0$ 时刻接入系统
- $f(t)\varepsilon(t-t_0)$ 表示信号 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 时刻接入系统

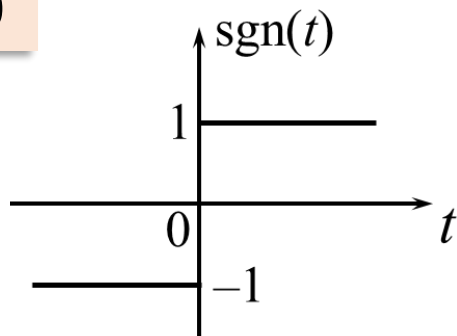
体现在波形上为跳变点或者波形的起始和终止

宽度为 τ 的门函数



$$g_{\tau}(t) = \varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

符号函数 $\text{sgn}(t)$



$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

例题3 根据信号的函数解析式作出信号的波形图。

1) $f(t) = r(\sin t)$

2) $f(t) = \varepsilon(\cos \frac{\pi}{2} t)$

3) $f(t) = \text{sgn}(t^2 - 4)$

4) $f(t) = r(2 - t)\varepsilon(t)$

5) $f_1(t) = t\varepsilon(t - 1)$, $f_2(t) = (t - 1)\varepsilon(t - 1)$, $f_3(t) = (t - 1)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - 3)]$

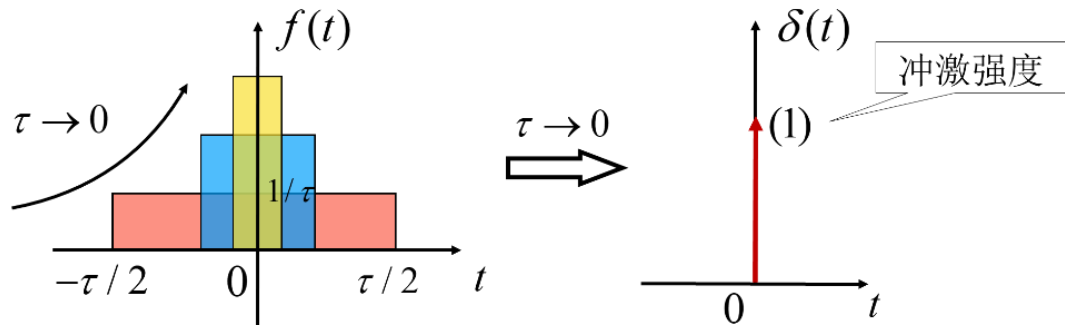
■ 奇异信号

单位冲激信号 $\delta(t)$

引入

矩形脉冲可视为作用效果（面积）一定，作用时间与作用力大小成反比的力。矩形脉冲持续时间减小，要维持力效果不变，则需要增大脉冲的幅度。

单位冲激信号就可以视为作用效果不变，但是作用时间无限小，从而大小无限大的一个力，取脉冲持续时间趋于0，就可以得到单位冲激信号。



记宽度为 τ ，幅度为1的矩形脉冲为门函数 $g_\tau(t)$ ，则冲激信号的定义为

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} g_\tau(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

■ 奇异信号

单位冲激信号 $\delta(t)$

定义

➤ 物理定义
$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} g_{\tau}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

➤ 狄拉克定义
$$\delta(t): \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \end{cases} \quad \delta(t-t_0): \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \\ \delta(t-t_0) = 0, t \neq t_0 \end{cases}$$

➤ 广义函数定义
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) \varphi(t) dt = \varphi(t_0) \end{cases}$$

广义函数定义： $\delta(t)$ 作用于检验函数 $\varphi(t)$ 的效果是给 $\varphi(t)$ 赋 $\varphi(0)$ 的值；同理， $\delta(t-t_0)$ 作用于检验函数 $\varphi(t)$ 的效果是：给 $\varphi(t)$ 赋 $\varphi(t_0)$ 的值。

■ 奇异信号

单位冲激信号 $\delta(t)$

性质

➤ 奇偶性 冲激信号为偶函数: $\delta(-t) = \delta(t)$

➤ 与普通函数相乘
$$\begin{cases} f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \\ f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases}$$

➤ 取样性质
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t-t_0)dt \begin{cases} f(t_0), & t_0 \in [t_1, t_2] \\ 0, & t_0 \notin [t_1, t_2] \end{cases}$$

➤ 尺度变换性质 $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \quad (a \neq 0) \quad \delta(at-t_0) = \frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$

➤ $\delta(t)$ 与 $\varepsilon(t)$ 关系 $\delta(t) = \frac{d}{dt}\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(at-t_0)dt = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{t_0}{a}\right)$$

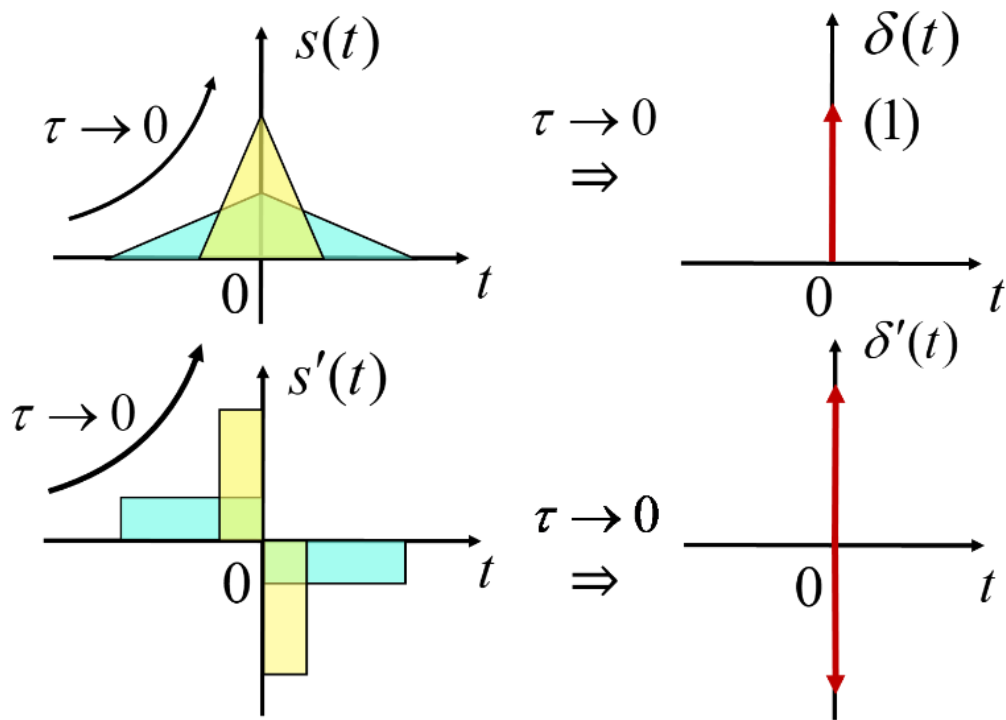
若信号的函数值有跳变, 则信号在跳变点处的导数为冲激信号, 其冲激强度为信号在跳变点处的跳跃值。

■ 奇异信号

冲激偶信号 $\delta'(t)$

定义

冲激偶信号为冲激信号对时间的导数，即： $\delta'(t) = \frac{d}{dt} \delta(t)$



■ 奇异信号

冲激偶信号 $\delta'(t)$

性质

➤ 奇偶性 冲激偶信号为奇函数 $\delta'(-t) = -\delta'(t)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) dt = 0$

➤ 与普通函数相乘
$$\begin{cases} f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t) \\ f(t)\delta'(t-t_0) = f(t_0)\delta'(t-t_0) - f'(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases}$$

$$[f(t)\delta(t)]' = f(t)\delta'(t) + f'(t)\delta(t) \quad f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t), \quad f'(t)\delta(t) = f'(0)\delta(t)$$

$$f(t)\delta'(t) = [f(0)\delta(t)]' - f'(0)\delta(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

➤ 取样性质
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t) dt = -f'(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t-t_0) dt = -f'(t_0) \end{cases}$$

➤ 尺度变换性质 $\delta'(at) = \frac{1}{a|a|} \delta'(t) \quad (a \neq 0)$

例题4 完成下列与冲激信号和冲激偶信号有关的计算。

1) $e^{-2t} \delta(2t+4)$

2) $e^{-3t} \delta'(t)$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{t} \delta(t) dt$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} (2t-3) \delta'(t) dt$

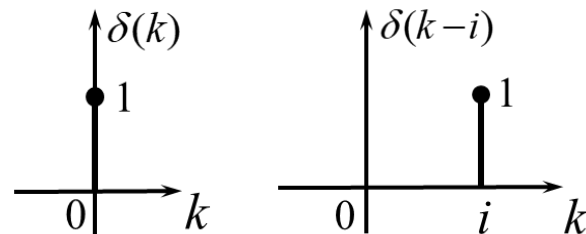
5) $\int_{-2}^2 \cos \frac{\pi t}{2} [\delta'(t-1) + \delta(t+5)] dt$

6) $\int_{-\infty}^t (1-\tau) \delta'(2\tau) d\tau$

■ 基本离散序列

单位序列 $\delta(k)$

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \delta(k-i) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

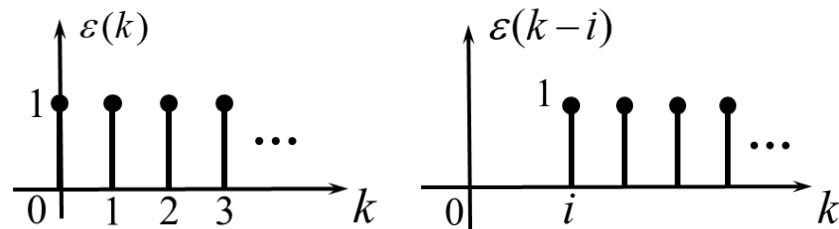


$$f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k) \quad f(k)\delta(k-i) = f(i)\delta(k-i)$$

辨析： $\delta(k)$ 在 $k=0$ 处值为 1； $\delta(t)$ 在 $t=0$ 处幅度为无穷大。

单位阶跃序列 $\varepsilon(k)$

$$\varepsilon(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \varepsilon(k-i) = \begin{cases} 1 & k \geq i \\ 0 & k < i \end{cases}$$



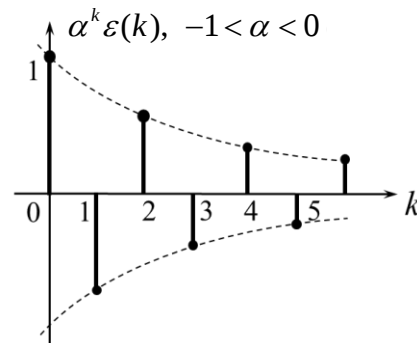
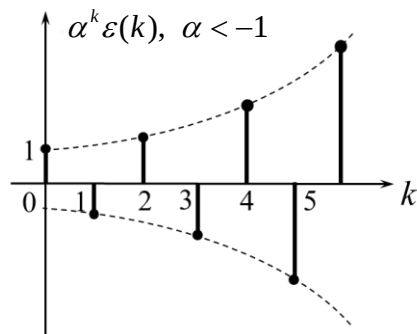
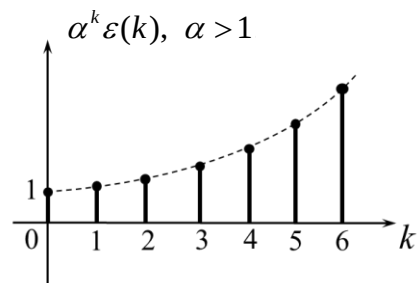
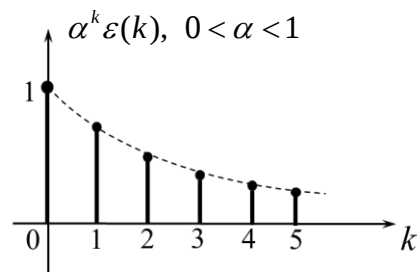
$$\delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) \quad \varepsilon(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n) = \sum_{i=-\infty}^k \delta(i)$$

辨析： $\varepsilon(k)$ 在 $k=0$ 处有定义，值为 1； $\varepsilon(t)$ 在 $t=0$ 处无定义或取 1/2。

基本离散序列

单边指数序列

$$f(k) = \alpha^k \varepsilon(k), k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} |\alpha| > 1 \text{ 时, 发散} \\ |\alpha| < 1 \text{ 时, 收敛} \\ \alpha > 0 \text{ 时, 恒正} \\ \alpha < 0 \text{ 时, 正负交错} \end{cases}$$



复指数序列

$$f(k) = e^{(a+j\omega_0)k} = e^{ak} e^{j\omega_0 k} = \alpha^k e^{j\omega_0 k} = \alpha^k [\cos \omega_0 k + j \sin \omega_0 k] (\alpha = e^a)$$

$$\text{对 } \alpha, \omega_0 \text{ 讨论: } \begin{cases} \alpha = 1: \text{ 实部和虚部均为等幅正弦序列} \\ \alpha > 1: \text{ 实部和虚部均为增长正弦序列} \\ \alpha < 1: \text{ 实部和虚部均为减幅正弦序列} \\ \omega_0 = 0: \text{ 为指数序列} \\ \alpha = 1, \omega_0 = 0: f(k) \text{ 为常数序列} \\ \alpha = 1, \omega_0 \neq 0: f(k) \text{ 为虚指数序列} \end{cases}$$

■ 基本离散序列

正弦序列

$$f(k) = \cos \omega_0 k, \quad \omega_0 \text{称为数字角频率}$$

正弦序列可视为正弦信号的采样

$$\begin{array}{ccc} \text{连续正弦信号} & \xrightarrow{\text{采样}} & \text{离散正弦序列} \\ \cos \Omega_0 t & & \cos \Omega_0 t \Big|_{t=kT} = \cos \Omega_0 T k = \cos \omega_0 k \end{array}$$

辨析：模拟角频率与数字角频率

$$\begin{array}{ccc} \text{模拟角频率 } \Omega_0 & \xrightarrow[\text{采样周期 } T]{\omega_0 = \Omega_0 T} & \text{数字角频率 } \omega_0 \end{array}$$

$$\omega_0 = \Omega_0 T = 2\pi \frac{T}{T_0} = 2\pi \frac{f_0}{f_s}$$

数字角频率是一个相对量，单位为rad，可根据模拟角频率和采样周期确定。

■ 基本离散序列

正弦序列与虚指数序列的周期性

$$f(k+N) = \begin{cases} \cos \omega_0(k+N) = \cos(\omega_0 k + \omega_0 N) \\ e^{j\omega_0(k+N)} = e^{j\omega_0 k} \cdot e^{j\omega_0 N} \end{cases}$$

$$f(k) = f(k+N) \Rightarrow \omega_0 N = 2m\pi \quad N = m \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad m \text{ 和 } N \text{ 必须为整数}$$

- $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时，取 $m=1$ ，正弦/虚指数序列为周期序列，周期 $N = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ；
- $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数时，设 $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{P}{Q}$ ， P 、 Q 为互质的整数，取 $m=Q$ ，则正弦/虚指数序列为周期序列，周期 $N = P$ ；
- $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数时，不存在整数 N ，正弦/虚指数序列不具备周期性。

例题5 判断下列序列是否是周期序列，如果是，求其周期。

1) $f(k) = 5\cos 4k$

2) $f(k) = \cos \frac{3\pi}{4}k + \cos \frac{2\pi}{3}k$

3) $f(k) = \cos \frac{\pi}{3}k + e^{j\frac{2\pi}{5}k}$

➤ 若两周期序列周期之比为有理数，设 $N_1/N_2 = P/Q$ ，其中 P 、 Q 为互质的整数，则和序列为周期序列，周期为 N_1 和 N_2 的最小公倍数：

$$N = QN_1 = PN_2$$

序列的周期必为整数，故两个离散周期序列之和一定是周期序列。

1.3 信号的基本运算

■ 信号的基本运算

信号的加法、乘法

$$f_1(\bullet) \pm f_2(\bullet) \pm \cdots f_n(\bullet) \quad f_1(\bullet) \times f_2(\bullet) \times \cdots \times f_n(\bullet)$$

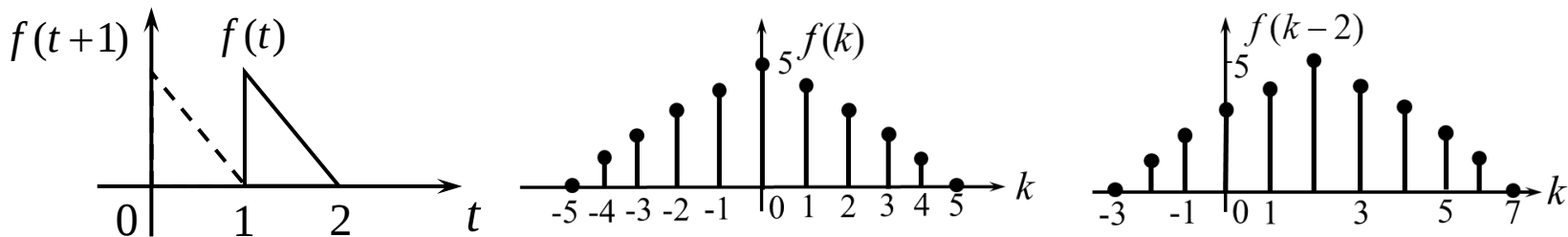
必须把同一时刻的值相加或相乘

信号的平移

$f(t) \rightarrow f(t-t_0)$ 或 $f(k) \rightarrow f(k-k_0)$ 时, $f(\bullet)$ 右移 t_0 或 k_0

$f(t) \rightarrow f(t+t_0)$ 或 $f(k) \rightarrow f(k+k_0)$ 时, $f(\bullet)$ 左移 t_0 或 k_0

记忆方法: 左加右减自变量。

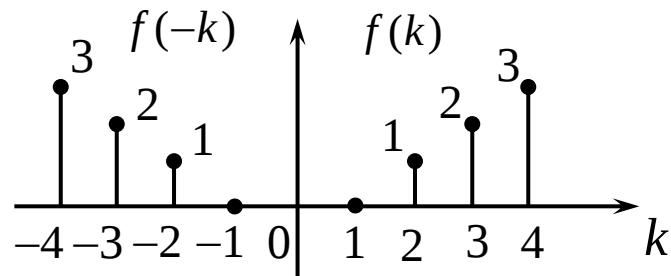
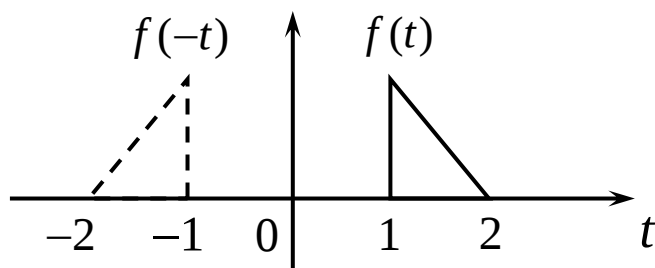


■ 信号的基本运算

信号的反转（反折或反褶）

$$f(t) \rightarrow f(-t) \text{ 或 } f(k) \rightarrow f(-k)$$

把原信号以纵坐标为轴旋转 180°

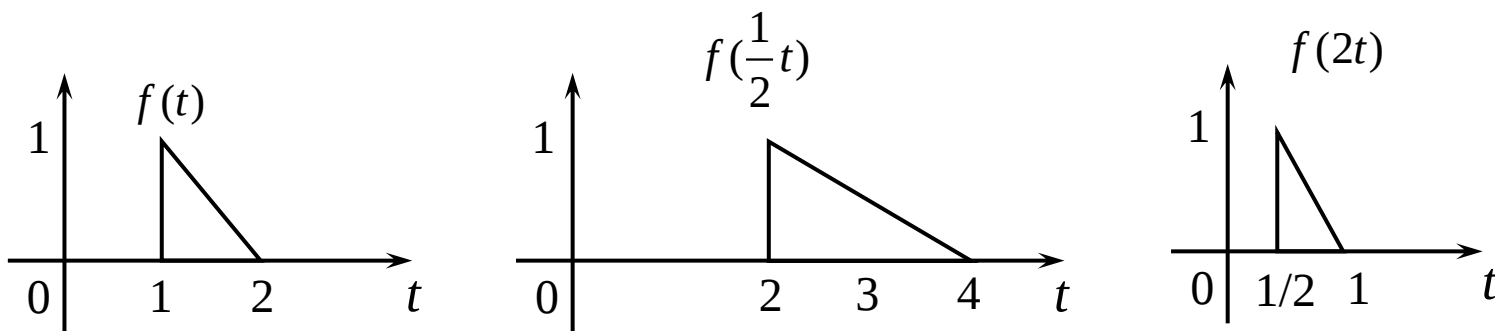


■ 信号的基本运算

信号的尺度变换（横坐标展、缩）

$$f(t) \rightarrow f(at) \begin{cases} a > 1 \text{ 时, 把原信号以原点为基准压缩 } a \text{ 倍} \\ 0 < a < 1 \text{ 时, 把原信号以原点为基准扩展 } 1/a \text{ 倍} \\ a < 0 \text{ 时, 除尺度变换以外还包含反转运算} \end{cases}$$

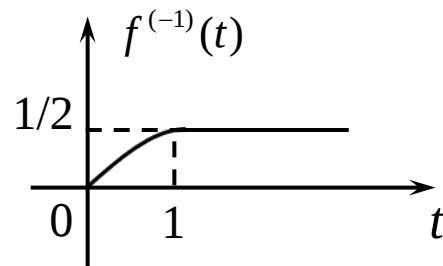
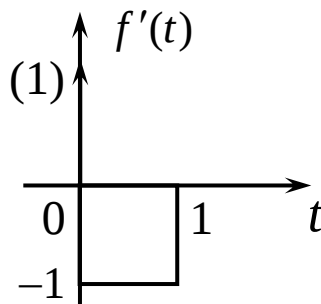
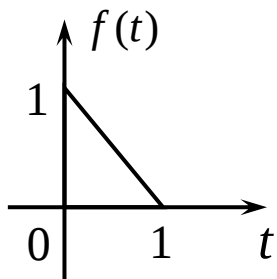
离散序列不做尺度变换，因为可能丢失信息。



■ 信号的基本运算

连续信号的微分与积分

- 连续信号的微分： $f'(t) = \frac{d}{dt} f(t)$ 作用：体现信号的变化
- 连续信号的积分： $f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$ 作用：平滑信号的变化



$$f(t) = (1-t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \{ (1-t)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] \} \\ &= (1-t)[\delta(t) - \delta(t-1)] - [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] \\ &= \delta(t) - [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(-1)}(t) &= \int_{-\infty}^t (1-x)[\varepsilon(x) - \varepsilon(x-1)] dx \\ &= \int_0^t (1-x) dx - \int_1^t (1-x) dx \\ &= \left(t - \frac{1}{2}t^2 \right) \varepsilon(t) - \left(t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) \varepsilon(t-1) \\ &= \left(t - \frac{1}{2}t^2 \right) [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] + \frac{1}{2} \varepsilon(t-1) \end{aligned}$$

■ 信号的基本运算

离散序列的差分与求和

➤ 离散序列的差分

一阶前向差分 $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

$\Delta \nabla$: 差分算子

一阶后向差分 $\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$

$$\nabla f(k) = \Delta f(k-1)$$

➤ 离散序列的求和 $\sum_{i=-\infty}^k f(i)$

序列求和的结果还是一个关于 k 的序列

$$\begin{cases} \delta(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) = \nabla \varepsilon(k) \\ \varepsilon(k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \delta(k-j) = \sum_{i=-\infty}^k \delta(i) \end{cases}$$

■ 信号的基本运算

信号运算的综合应用

平移、反折、压缩等各种运算均对独立、单一的时间变量 t/k 计算，而不是对 at 或 $at + b$ 等整体计算。另外：在尺度变换时我们需要注意对冲激信号的尺度变换。

$$f(t) \rightarrow f(at+b)$$

$$f(t) \rightarrow f(t+b) \rightarrow f(at+b)$$

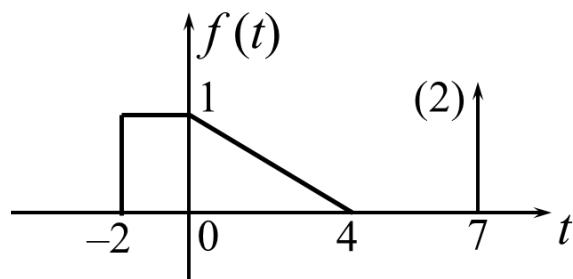
先平移，后尺度（含反折）

$$f(at+b) \rightarrow f(t)$$

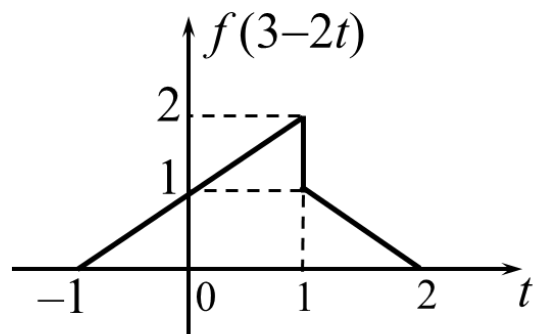
$$f(at+b) \rightarrow f(t+b) \rightarrow f(t)$$

先尺度（含反折），后平移

例题6 已知 $f(t)$ 的波形如下图，试画出 $f(-2t+1)$ 的波形。



例题7 已知 $f(3-2t)$ 的波形如下图，试画出 $f(t)$ 和 $f'(t)$ 的波形。



1.4 系统的描述与分类

系统的描述

系统的分类

■ 系统的描述

系统的数学模型

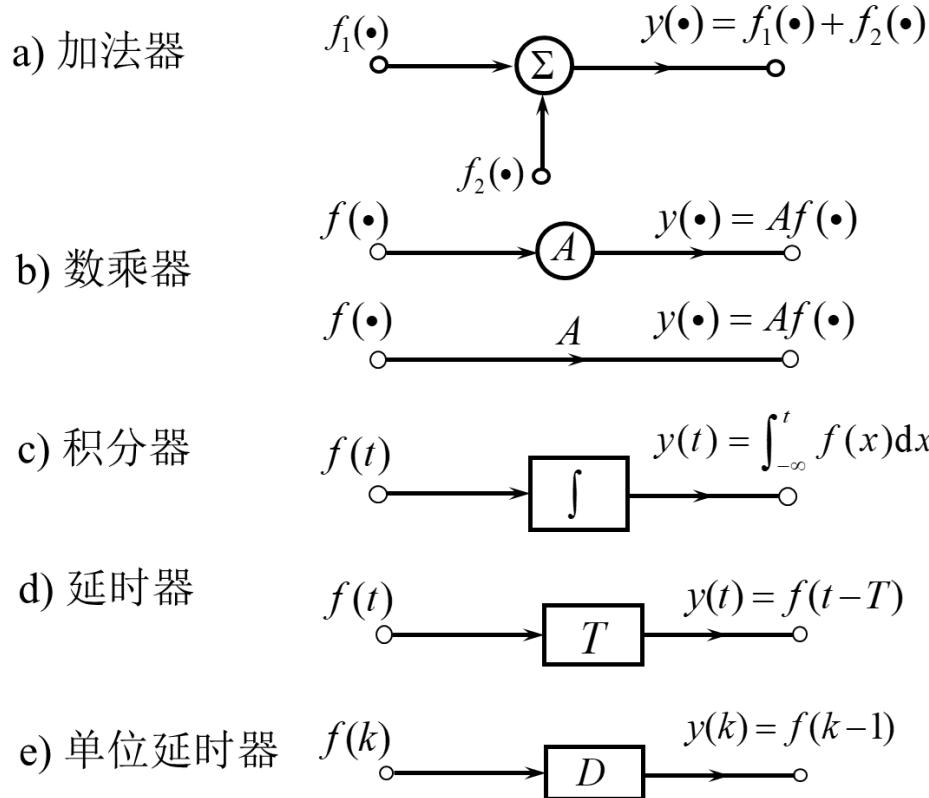
输入-输出描述法：着眼于系统**输入与输出**的关系，适用于单输入-单输出系统。连续系统常用**微分方程**进行表征，离散系统常用**差分方程**进行表征。

状态变量描述法：既可描述输入输出的关系，又可以**描述系统内部的状态**，更适合调整系统内部参数，实现最优控制。既可用于单输入-单输出系统，也可用于多输入-多输出系统。用**状态方程和输出方程**进行表征（第八章）。

■ 系统的描述

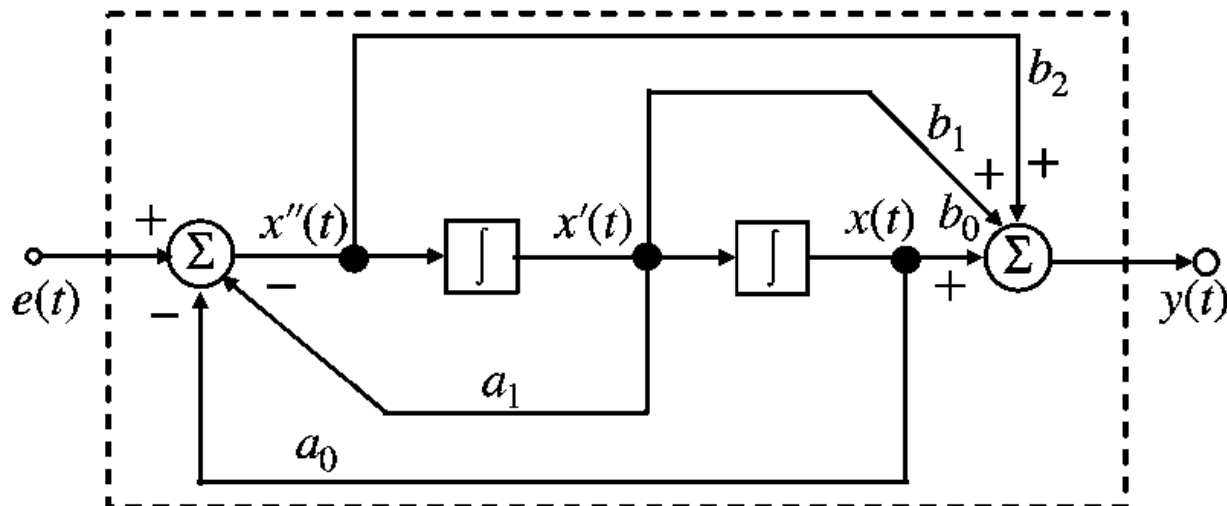
系统的框图描述

用框图表示输入输出的运算关系，每个框图反映一种数学运算功能，若干个框图可以组成一个完成的系统。



■ 系统的描述

连续系统框图与微分方程



左加法器方程:

$$\underline{x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = e(t)}$$

x 换成 y

$$\underline{y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 e''(t) + b_1 e'(t) + b_0 e(t)}$$

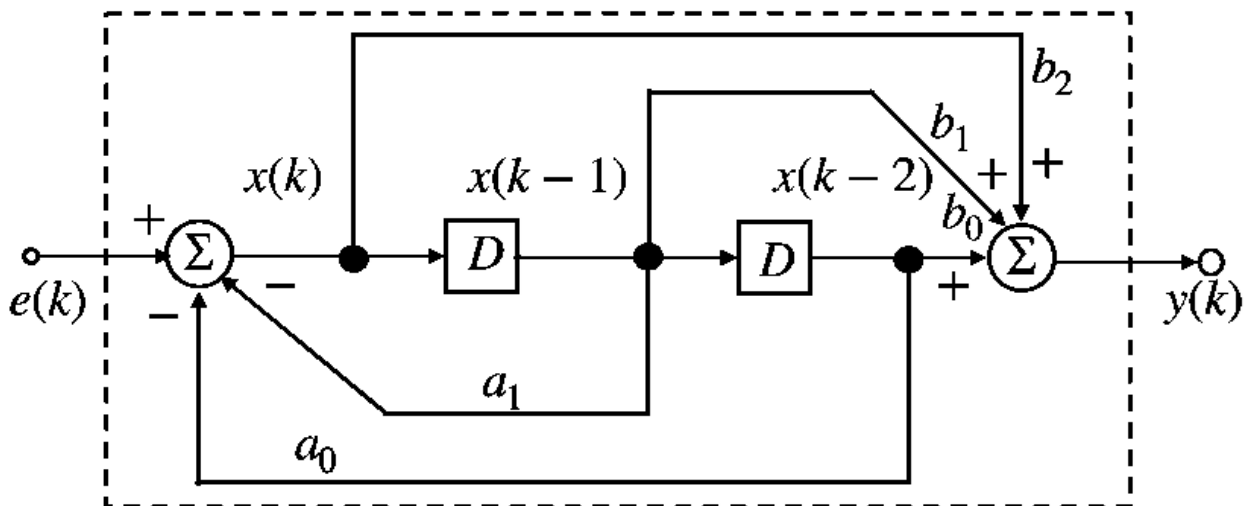
右加法器方程:

$$\underline{y(t) = b_2 x''(t) + b_1 x'(t) + b_0 x(t)}$$

x 换成 e

■ 系统的描述

离散系统框图与差分方程



左加法器方程：

$$\underline{x(k) + a_1 x(k-1) + a_0 x(k-2) = e(k)}$$

x 换成 y

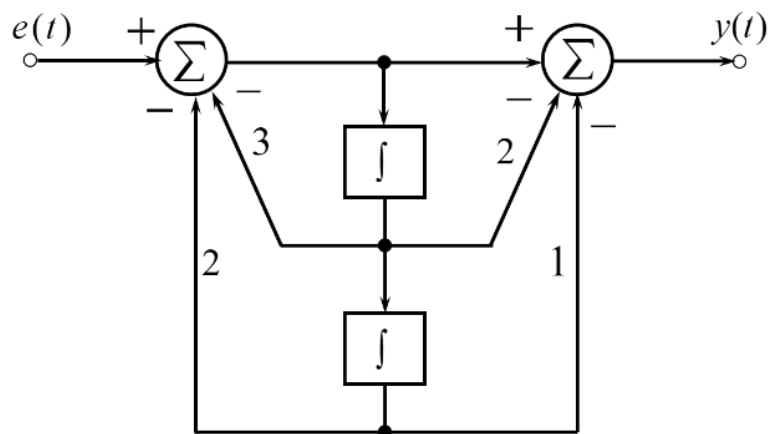
$$\underline{y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_2 e(k) + b_1 e(k-1) + b_0 e(k-2)}$$

右加法器方程：

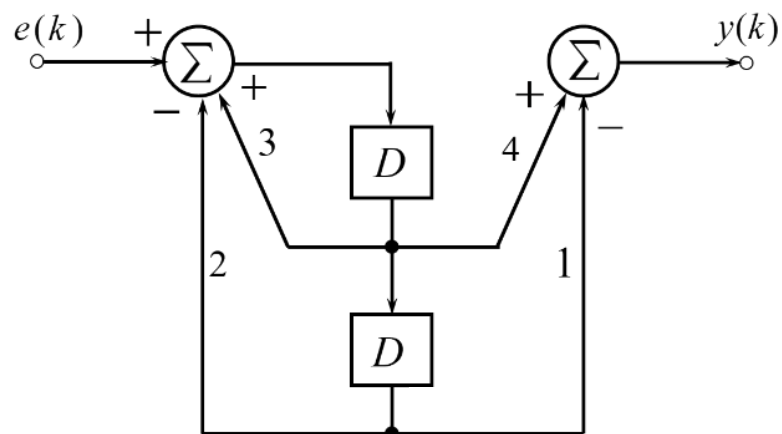
$$\underline{y(k) = b_2 x(k) + b_1 x(k-1) + b_0 x(k-2)}$$

x 换成 e

例题8 根据图示系统框图建立对应的微分方程或者差分方程。



(1)



(2)

■ 系统的分类

连续（时间）系统与离散（时间）系统

- **连续系统：**系统输入和输出均为连续时间信号，用微分方程表征；
- **离散系统：**系统输入和输出均为离散时间信号，用差分方程表征。

即时（无记忆）系统与动态（记忆）系统

- **即时系统：**系统输出仅取决于同一时刻的输入，而与历史状态无关，用代数方程表征；（如电阻电路）
- **动态系统：**输出同时取决于同一时刻的输入与系统的历史状态，用微分/差分方程表征。（如RLC动态电路）

■ 系统的分类

线性系统与非线性系统

- 线性系统：满足均匀性和叠加性的系统。
- 均匀性：系统的激励信号增大 K 倍时，系统响应也增大 K 倍；
- 叠加性：几个激励信号同时作用于系统时，系统响应等于各激励信号单独作用于系统的响应之和。
- 非线性系统：与线性系统相对，不具备均匀性或叠加性。

时变系统与时不变系统

- 时变系统：系统参数随时间变化；
- 时不变系统：系统参数不随时间变化的系统。

■ 系统的分类

因果系统与非因果系统

- 因果系统：当且仅当输入激励时，系统才会出现响应，即响应不会先于激励；
- 非因果系统：响应先于激励产生的系统。

稳定系统与不稳定系统

- 稳定系统：输入有界，输出也有界的系统；
- 不稳定系统：与稳定系统相对。

在这门课程中主要学习线性时不变系统

1.5 线性时不变系统的性质

线性性质与分解特性

时不变性质

微分与积分性质

因果性与稳定性

■ 线性性质与分解特性



线性性质

输入-输出关系: $y(\bullet) = T[e(\bullet)]$

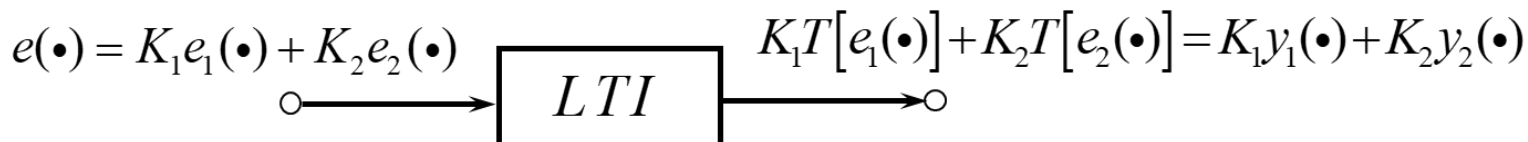
- 均匀性: 系统的激励增大 K 倍时, 响应相应也增大 K 倍

$$y(\bullet) = T[e(\bullet)] \implies T[Ke(\bullet)] = KT[e(\bullet)] = Ky(\bullet)$$

- 叠加性: 几个激励信号同时作用于系统时, 系统响应等于各激励信号单独作用于系统的响应之和

$$\begin{cases} y_1(\bullet) = T[e_1(\bullet)] \\ y_2(\bullet) = T[e_2(\bullet)] \end{cases} \implies T[e_1(\bullet) + e_2(\bullet)] = T[e_1(\bullet)] + T[e_2(\bullet)] = y_1(\bullet) + y_2(\bullet)$$

$$T[K_1e_1(\bullet) + K_2e_2(\bullet)] = K_1T[e_1(\bullet)] + K_2T[e_2(\bullet)] = K_1y_1(\bullet) + K_2y_2(\bullet)$$



例题9 判断下列系统是否是线性系统。

1) $y(t) = 2e(t)$

2) $y(t) = 2e(t) + 3$

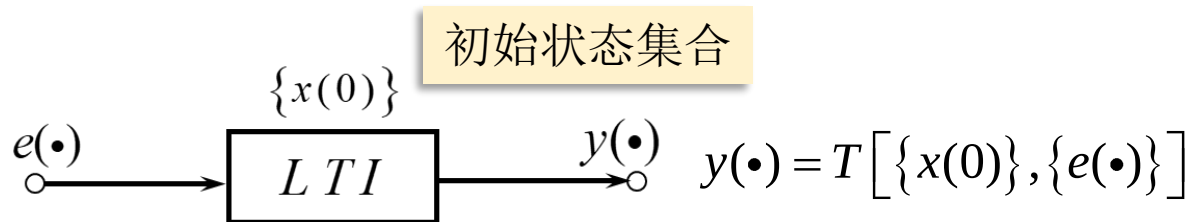
3) $y(t) = t^2 e(t)$

4) $y(t) = 4 \frac{d}{dt} e(t)$

5) $y(k) = \text{Im}[e(k)]$ $\text{Im}[\bullet]$ 表示取虚部

■ 线性性质与分解特性

分解特性 动态系统的响应由激励和初始状态共同决定



$$y(\bullet) = T[\{x(0)\}, \{e(\bullet)\}] = \underbrace{T[\{x(0)\}, \{0\}]}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{T[\{0\}, \{e(\bullet)\}]}_{\text{零状态响应}} = y_{zi}(\bullet) + y_{zs}(\bullet)$$

➤ 零输入响应: $y_{zi}(\bullet) = T[\{x(0)\}, \{0\}]$

激励为0, 仅由初始状态引起的系统响应。

➤ 零状态响应: $y_{zs}(\bullet) = T[\{0\}, \{e(\bullet)\}]$

初始状态为0, 仅由激励引起的系统响应。

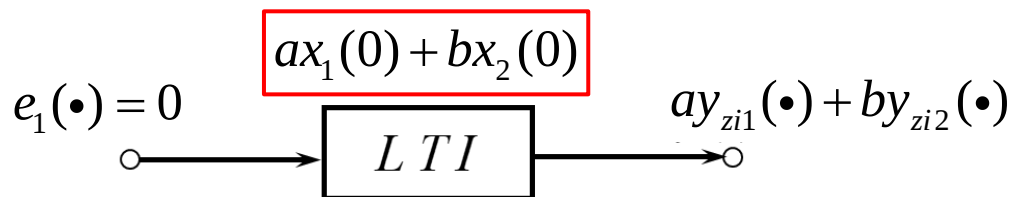
■ 线性性质与分解特性

分解特性

- 零输入线性 零输入响应对系统的初始状态有线性关系。

$$y_{zi1}(\bullet) = T[x_1(0)], y_{zi2}(\bullet) = T[x_2(0)]$$

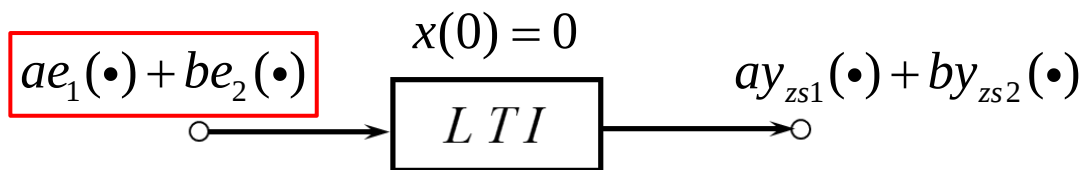
$$T[ax_1(0) + bx_2(0)] = aT[x_1(0)] + bT[x_2(0)] = ay_{zi1}(\bullet) + by_{zi2}(\bullet)$$



- 零状态线性 零状态响应对系统的激励有线性关系。

$$y_{zs1}(\bullet) = T[e_1(\bullet)], y_{zs2}(\bullet) = T[e_2(\bullet)]$$

$$T[ae_1(\bullet) + be_2(\bullet)] = aT[e_1(\bullet)] + bT[e_2(\bullet)] = ay_{zs1}(\bullet) + by_{zs2}(\bullet)$$



例题10 判断下列系统是否是线性系统。

1) $y(t) = e(t)x(0) + \int_0^t \sin x e(x) dx$

2) $y(t) = 2x(0) + |e(t)|$

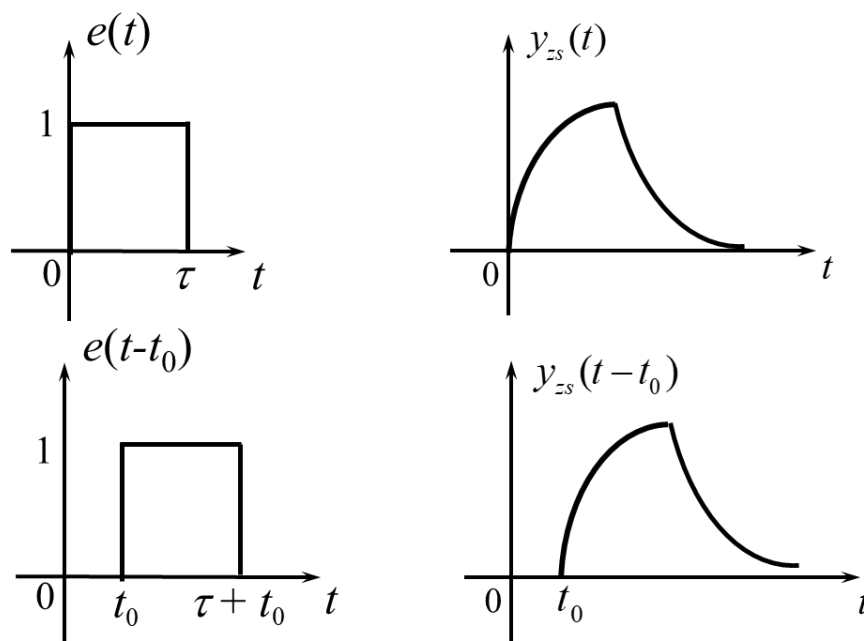
3) $y(k) = x^2(0) + 4e(k)$

4) $y(t) = x(0)e^{-t} + \int_0^t e(x) \cos x dx$

■ 时不变性质

$$y_{zs}(\bullet) = T[\{0\}, \{e(\bullet)\}] \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} T[\{0\}, \{e(t-t_d)\}] = y_{zs}(t-t_d) \\ T[\{0\}, \{e(k-k_d)\}] = y_{zs}(k-k_d) \end{cases}$$

时不变系统的响应形式与激励接入系统的时间无关，激励延时，输出也产生相应延时而波形不变。



例题11 判断下列系统是否是时不变系统。

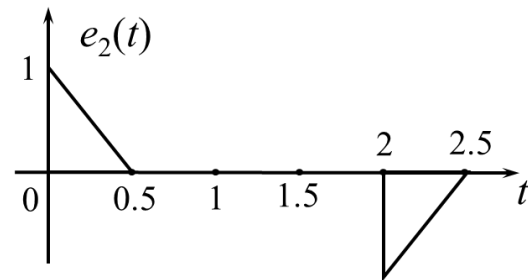
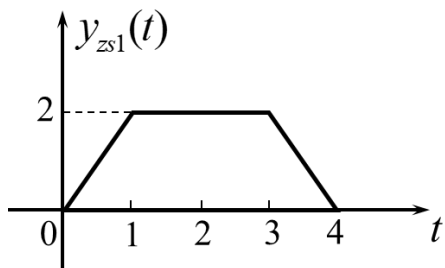
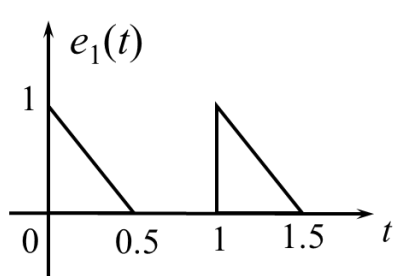
1) $y(t) = \sin[e(t)] + 2e(t)$ 2) $y(k) = ke(k)$

3) $y(t) = e(2t)$ 4) $y(t) = e(-t)$

时不变直观判断方法：若信号之前出现变系数，或者信号有反转和尺度变换，则系统为时变系统。

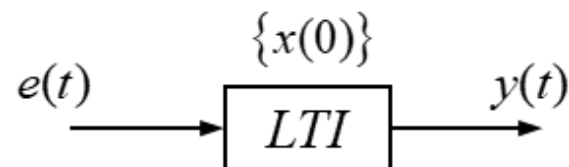
例题12

某一LTI连续系统，输入信号和响应信号如下图所示，当输入为 $e_1(t)$ 时，其零状态响应为 $y_{zs1}(t)$ ；当输入为 $e_2(t)$ 时，试求该系统的零状态响应 $y_{zs2}(t)$ 。



例题13 给定LTI连续系统如下图，已知：

$$\begin{cases} y_1(t) = T[\{x(0)\}, \{e(t)\}] = [2e^{-t} + \cos \pi t] \varepsilon(t) \\ y_2(t) = T[\{x(0)\}, \{2e(t)\}] = [3e^{-t} + 2 \cos \pi t] \varepsilon(t) \end{cases}$$



求： $y_3(t) = T[\{2x(0)\}, \{5e(t)\}]$ 和 $y_4(t) = T[\{2x(0)\}, \{5e(t-2)\}]$

■ 微分与积分性质

$$y_{zs}(t) = T[\{0\}, \{e(t)\}] \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} T\left[\{0\}, \frac{de(t)}{dt}\right] = \frac{dy_{zs}(t)}{dt} \\ T\left[\{0\}, \int_{-\infty}^t e(x)dx\right] = \int_{-\infty}^t y_{zs}(x)dx \end{cases}$$

- 激励求导或积分，响应为原响应求导或积分
- 该性质对于高阶导数或重积分同样适用

例题14

某一LTI系统，激励为 $e(t) = \varepsilon(t)$ 时，零状态响应为 $y_{zs}(t) = e^{-2t} \varepsilon(t)$ ，试求当激励为 $e(t) = 2\delta(t-1)$ 时，系统的零状态响应。

■ 因果性与稳定性

稳定性

稳定系统满足：当 $|e(\bullet)| < \infty$ 时，存在 $|y_{zs}(\bullet)| < \infty$

若系统对**有界输入**的**零状态响应也有界**，则系统为稳定系统。

例题16 判断下列系统是否是稳定系统。

1) $y_{zs}(k) = e(k) + e(k+1)$

2) $y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^t e(x) dx$

3) $y_{zs}(k) = (k-2)e(k)$

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger